第４講　数列

1　自然数 n に対して，3^n を 5 で割ったときの商を a_n，余りを b_n とおく．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{100} b_n$ の値を求めよ．

(2)　a_n を b_n を用いて表せ．

(3)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{100} a_n$ を 3 で割ったときの余りを求めよ．

2　初項 a，公差 -3 の等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする．また，T_n を次の式で定める．

$$T_n=\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)a_k=na_1+(n-1)a_2+(n-2)a_3+\cdots\cdots+2a_{n-1}+a_n$$

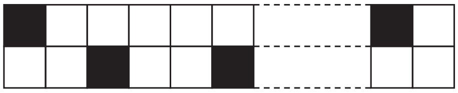
このとき，次の問いに答えよ．

(1)　数学的帰納法を用いて，$S_n=\dfrac{1}{2}n\{2a-3(n-1)\}$ となることを証明せよ．

(2)　T_n を a，n を用いて表せ．

(3)　a を自然数とする．$S_n<0$ かつ $T_n\geqq 0$ を満たす自然数 n の個数が30であるような a の値をすべて求めよ．

3　n を自然数とする．白色または黒色の辺の長さが1の正方形のタイル $2n$ 枚を用いて，右図のように縦の長さ2，横の長さ n の長方形に敷きつめる．



このとき，次の条件を満たすように敷きつめるものとする．

（条件）　どの2つの黒色のタイルも頂点を共有しない．

左上（上段の左端）と左下（下段の左端）のタイルがともに白色になるときの場合の数を a_n，左上が黒色で左下が白色となるときの場合の数を b_n，すべての場合の数を c_n とする．

次の問いに答えよ．

(1)　a_1，b_1，c_1，a_2，b_2，c_2 を求めよ．

(2)　a_{n+1}，b_{n+1} を a_n，b_n を用いて表せ．

(3)　$a_{n+1}+a_n$ を求めよ．また，$a_{n+1}-2a_n$ を求めよ．

(4)　c_n を求めよ．

第4講　数列

1 (1)　$3^1=3=5\times0+3$ より，$b_1=3$　　$3^2=9=5\times1+4$ より，$b_2=4$

$3^3=27=5\times5+2$ より，$b_3=2$　　$3^4=81=5\times16+1$ より $b_4=1$

また，$3^{n+4}-3^n=(3^4-1)\cdot3^n=80\cdot3^n=5\cdot16\cdot3^n$

これは5の倍数より，3^{n+4} と 3^n は5で割ったときの余りが一致する．

したがって，$b_{n+4}=b_n$

よって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{100}b_n=\sum_{k=1}^{25}(b_{4k-3}+b_{4k-2}+b_{4k-1}+b_{4k})$

$=(b_1+b_2+b_3+b_4)\times25=25(3+4+2+1)=250$

(2)　$3^n=5a_n+b_n$ より $a_n=\dfrac{1}{5}(3^n-b_n)$

(3)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{100}a_n=\frac{1}{5}\left(\sum_{n=1}^{100}3^n-\sum_{n=1}^{100}b_n\right)=\frac{1}{5}\left\{\frac{3(3^{100}-1)}{3-1}-250\right\}=3\cdot\frac{3^{100}-1}{10}-50$

(2)より $3^{100}=5a_{100}+b_{100}$ であり，

(1)より $b_{100}=b_{96}=b_{92}=\cdots\cdots=b_4=1$ であることから，$3^{100}=5a_{100}+1$

よって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{100}a_n=3\cdot\frac{5a_{100}}{10}-50=3\left(\frac{a_{100}}{2}-17\right)+1$ ……①

ここで，$5a_{100}=3^{100}-1$

3^{100} は奇数より，$3^{100}-1$ は偶数，すなわち2の倍数．

2と5は互いに素より，a_{100} は2の倍数である．

したがって，$\dfrac{a_{100}}{2}-17$ は整数であることから，①より $\displaystyle\sum_{n=1}^{100}a_n$ を3で割ったときの余りは1

2 (1)　$S_n=\dfrac{1}{2}n\{2a-3(n-1)\}$ ……①　とする．

［Ⅰ］　$n=1$ のとき

$S_1=a_1=a$ より①は成立

［Ⅱ］　$n=k$ のとき

①が成り立つと仮定すると $S_k=\dfrac{1}{2}k\{2a-3(k-1)\}$

$S_{k+1}=S_k+a_{k+1}$

$=\dfrac{1}{2}k\{2a-3(k-1)\}+(a-3k)$

$=\dfrac{2ak-3k(k-1)+2a-6k}{2}$

$=\dfrac{2a(k+1)-3k(k+1)}{2}=\dfrac{1}{2}(k+1)(2a-3k)$

よって，①は $n=k+1$ のときも成立する．

以上より，すべての自然数 n で①が成立することが示された．

(2)　$T_n=\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)a_k$

$=\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)\{a-3(k-1)\}$

$=\sum_{k=1}^{n}\{n-(k-1)\}\{a-3(k-1)\}$

$=\sum_{k=1}^{n}\{na-(a+3n)(k-1)+3(k-1)^2\}$

$=na\cdot n-(a+3n)\cdot\frac{1}{2}n(n-1)+3\cdot\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$

$=\frac{1}{2}n\{2na-(n-1)(a+n+1)\}$

$=\frac{1}{2}n\{2na-(n-1)a-(n-1)(n+1)\}$

$=\frac{1}{2}n\{a(n+1)-(n-1)(n+1)\}$

$=\frac{1}{2}n(n+1)(a-n+1)$

(3)　$S_n<0$ より $\frac{1}{2}n\{2a-3(n-1)\}<0$　　$n>0$ より $n>\frac{2}{3}a+1$

$T_n\geqq 0$より $\frac{1}{2}n(n+1)(a-n+1)\geqq 0$　　$n>0$ より $n\leqq a+1$

$a>0$より，$\frac{2}{3}a+1<n\leqq a+1$ ……①

これを満たす自然数 n の個数が 30 となるのは，

$n=a-28$，…，a，$a+1$ が解となるときである．

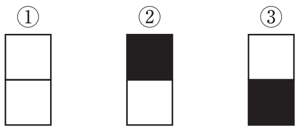
$a-29\leqq\frac{2}{3}a+1<a-28$

$87<a\leqq 90$

a は自然数より，$a=88$，89，90

3 (1)　$n=1$ のときのタイルの敷きつめ方は，

右図①，②，③の 3 通り．

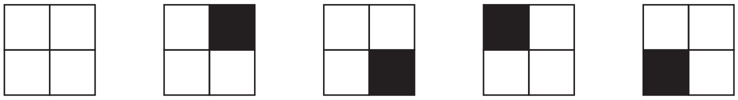


よって，$a_1=1$，$b_1=1$，$c_1=3$

$n=2$ のときのタイルの

敷きつめ方は，

右図の 5 通り．



よって，

$a_2=3$，$b_2=1$，$c_2=5$

(2)　横の長さが n の長方形において，左上が黒色で左下が白色になるときの場合の数と，左上が白色で左下が黒色であるときの場合の数は等しく，b_n 通りである．

(1)の①に，横の長さが n の長方形をつけて横の長さが $n+1$ の長方形を作ると考えると，

$$a_{n+1}=a_n+2b_n$$

(1)の②に，横の長さが n の長方形のうち左上と左下がともに白色のものをつけて横の長さが $n+1$ の長方形を作ると考えると，

$$b_{n+1}=a_n$$

(3)　(2)より $a_{n+2}=a_{n+1}+2b_{n+1}$　よって $a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$ …… ④

④より $a_{n+2}+a_{n+1}=2(a_{n+1}+a_n)$

よって，数列 $\{a_{n+1}+a_n\}$ は，初項 $a_2+a_1=4$，公比 2 の等比数列より

$$a_{n+1}+a_n=4\cdot 2^{n-1}=2^{n+1} \quad \cdots\cdots ⑤$$

また④より $a_{n+2}-2a_{n+1}=-(a_{n+1}-2a_n)$

よって，数列 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ は，初項 $a_2-2a_1=1$，公比 -1 の等比数列より

$$a_{n+1}-2a_n=1\cdot(-1)^{n-1}=(-1)^{n-1} \quad \cdots\cdots ⑥$$

(4)　⑤，⑥を辺々引いて

$$3a_n=2^{n+1}-(-1)^{n-1}$$

$$a_n=\frac{2^{n+1}-(-1)^{n-1}}{3}$$

よって，$c_n=a_n+2b_n=a_{n+1}=\dfrac{2^{n+2}-(-1)^n}{3}$